Title	Affine semigroup rings of condimension two
Author(s)	衛藤, 和文
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 964: 106-112
Issue Date	1996-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/60575
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
964 巻 1996 年 106-112

Affine semigroup rings of codimension two

早大 教育　衛藤　和文 (Kazufumi Eto)

1　はじめに

k を体とし、S を加法的半群 $\mathbf{N}_0^e$ の有限生成部分半群とする、但し e は自然数、$\mathbf{N}_0$ は 0 と自然数全体からなる集合。このとき、半群環 $k[S]$ が定義される。この環をアフィン半群環という。また、$k[S] \cong k\left[\prod_{i=1}^{s} t_i^{n_{i1}}, \cdots, \prod_{i=1}^{s} t_i^{n_{ir}}\right]$ $(n_{ij} \geq 0)$ のとき、次のような自然な環準同型写像が与えられ、

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \cdots, X_r] & \longrightarrow & k[S] \\ X_j & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{s} t_i^{n_{ij}} \end{array}$$

その核をアフィン半群環の定義イデアルという。

ここでは、その定義イデアルの高さが 2 の場合を取り扱う。この場合について、今までに知られている結果を述べよう。1970 年、Herzog は $s = 1$ のとき (必然的に $r = 3$)、その定義イデアルは、高々 3 元で生成されることを証明した ([7])。また、鴨井氏によって、S が simplicial 半群のとき $k[S]$ が Cohen-Macaulay であることと定義イデアルが高々3 元で生成されることが同値であることが証明された ([9])。さらに simplicial な場合に関しては最近の Morales の結果もある ([11])。

一方で、$\mathbf{P}^3$ の (projective) monomial curve の座標環もアフィン半群環で、その定義イデアルの高さも 2 である。この場合は Bresinsky らによって様々な性質が (例えば minimal free resolution) が調べられている ([1], [2], [3], [4], [8])。

この報告では、S が simplicial であることを仮定せずに、しかもすべての結果を含むような理論があることを紹介します。その中で最も驚くべきものは、簡単に定義イデアルの最小生成系 を求めるアルゴリズムが存在することだと思います。将来、この方向が定義イデアルの高さが 3 以上の場合にも応用できることを期待しています。

2 定義イデアルの最小生成系

$k[S] \cong k\left[\prod^{s} t_i^{n_{i1}}, \cdots, \prod^{s} t_i^{n_{ir}}\right]$, $A = k[X_1, \cdots, X_r]$ とする。このとき

$V = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{s1} & \cdots & n_{sr} \end{pmatrix} \subset \mathbf{Z}^r$ とおく。

$v \in V$ に対し、

$$F(v) = \prod_{\sigma_j(v)<0} X_j^{-\sigma_j(v)} - \prod_{\sigma_j(v)>0} X_j^{\sigma_j(v)} \in A$$

とおき、

$$I(V) = (F(v))_{v\in V} \quad \begin{pmatrix}\text{すべての } F(v) \text{ によって生成} \\ \text{される } A \text{ のイデアル}\end{pmatrix}$$

とおく。

このとき $I(V)$ が $k[S]$ の定義イデアルになる。より一般に、$\mathbf{Z}^r$ の部分加群 V に対して A のイデアル $I(V)$ は定義できることを注意する。事実上、重要なのは V が positive の場合である。V が positive とは、ある自然数 $n_1, \cdots, n_r$ が存在し、V が Ker $(n_1, \cdots, n_r)$ に含まれることである。但し,$(n_1, \cdots, n_r) \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^r, \mathbf{Z})$ 。V が positive のとき、$A/I(V)$ は positively graded ring になる。実際、$\deg X_i = n_i$ とおけば、各 $F(v)$ は homogeneous になり $I(V)$ は homogeneous ideal になる。

さらに degree を固定したとき次の補題が成立。

補題 2.1 V が *positive* のとき (その *positive degree* に関して)
$v_1, v_2 \in V$ について、

$$\deg F(v_1) \leq \deg F(v_1 + v_2)$$

ならば

$$\deg F(v_1 + v_2) \leq \deg F(2v_1 + v_2)$$

この補題は大変重要である。例えば

$$\begin{aligned} &\deg F(v_1) \leq \deg F(v_1 + v_2) \\ \text{かつ}\quad &\deg F(v_2) \leq \deg F(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

のとき、$F(v_1+v_2)$ はすべての $F(mv_1+nv_2)$ $(m>0,n>0)$ の形であらわされる多項式の中で degree 最小であることがわかる。さらに, $F(v_1), F(v_2)$ が最小生成系の一部で、

$$F(v_1+v_2) \notin (F(v_1), F(v_2))$$

ならば、$F(v_1+v_2)$ が 最小生成系 に含まれることが期待される (実際そうである)。

一方、$F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$ の場合はどのようになっているかというと、

補題 2.2 rank $\langle v_1, v_2\rangle = 2$ とする。このとき $F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$ となるための必要十分条件は、次の**符号条件**が成り立たないことである。

$$\begin{aligned}\exists i, i' \quad & \sigma_i(v_1) > 0, \sigma_{i'}(v_1) < 0 \\ & \sigma_i(v_2) < 0, \sigma_{i'}(v_2) > 0.\end{aligned}$$

上の補題によって、次がわかる。

$F(v_1+v_2) \in (F(v_1), F(v_2))$ ならば、
任意の $m>0, n>0$ に対して、

$$F(mv_1+nv_2) \in (F(v_1), F(v_2)).$$

すなわち、$F(v_1+v_2)$ がイデアル $(F(v_1), F(v_2))$ に入るかどうかによって、すべての $F(mv_1+nv_2)$ という形の多項式がそのイデアルに入るかどうかがわかる。

この 2 つの補題によって、次の最小生成系を求めるアルゴリズムをえる。

≪ アルゴリズム ≫

(1) $V = \langle v_1, v_2\rangle$ となる v_1, v_2 を選ぶ。

(2) v_1, v_2 の degree を最小化する。

すなわち、$F(v_1), F(v_2)$ の degree と $F(v_1+v_2), F(v_1-v_2)$ の degree を比較する。もし、それらの degree より

$\deg F(v_1), \deg F(v_2)$ が等号を含めて小さければ O.K。もし大きければ、例えば、

$$\deg F(v_1) > \deg F(v_1 + v_2)$$

のときは、$v_1 + v_2$ を v_1 と置きなおして、もう一度比較する。明らかにこの操作は有限回で終わる。

(3) $v_1 \quad v_2 \quad -v_1$ と並べ、前の補題の符号条件を各隣り合った元についてチェックする。符号条件をみたしているときは、その間に 2 つの元を加えたものを入れ、再び条件を新しく隣り合った元についてチェックする。もし条件をみたしてないときは、そのまま何も加えない。加えるものが無くなった時点で作業は終わる。

ここにあらわれた元の中で $-v_1$ 以外のそれぞれの元に対応する $F(v)$ という形の多項式が $I(V)$ の最小生成系をなす。

例 $V = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ の場合。

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$V = \langle v_1, v_2 \rangle$ で、degree 最小である。そこで、上のアルゴリズムの (3) を行うと、

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & -v_1 \end{array}$$

から、

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_1 & 4v_1 + v_2 & 3v_1 + v_2 & 2v_1 + v_2 & v_1 + v_2 & v_2 & -v_1 \end{array}$$

をえる。このとき、

$$F(v_1), F(4v_1+v_2), F(3v_1+v_2), F(2v_1+v_2), F(v_1+v_2), F(v_2)$$

が $I(V)$ の最小生成系である。

3 Minimal free resolution

前の節で、$I(V)$ の最小生成系が求まったので、Bresinsky ([1]) と同様の方法で minimal free resolution をえる。

定理 3.1 $A/I(V)$ は次の *minimal free resolution* をもつ。但し、$a = \mu(I(V)) \geq 3$.

$$0 \longrightarrow A^{a-3} \longrightarrow A^{2(a-2)} \longrightarrow A^a \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

この結果、

系 3.2 $A/I(V)$ が *Cohen-Macaulay* であるための必要十分条件は、$\mu(I(V)) \leq 3$ である。

さらに、鴨井 [10], Bresinsky et al. [3] の拡張として、次の結果を示すことができる。

定理 3.3 (1) $A/I(V)$ が *non Cohen-Macaulay k-Buchsbaum* ならば、$r = 4$ ($r = \dim A$).

(2) $A/I(V)$ が *Buchsbaum* ならば、$\mu(I(V)) \leq 4$.

(3) $A/I(V)$ が *k-Buchsbaum* ならば、$\mu(I(V)) \leq k+3$.

但し、$A/I(V)$ が *k-Buchsbaum* とは、$m^k H_m^{r-3}(A/I(V)) = 0$ となることである、ここで $m = (X_1, \cdots, X_r)$。

注意 $A/I(V)$ が non Cohen-Macaulay k-Buchsbaum アフィン半群環のとき、(1) より、$r = 4$, $\dim A/I(V) = 2$ となる。ゆえに、その定義する半群は必然的に simplicial になる。特に Buchsbaum の場合に、どのような半群になるかは鴨井 [10] によって研究されている。

また、non simplicial 半群に付随した半群環で、Cohen-Macaulay になるものも存在する。

注意 上の定理は、Cohen-Macaulay 性などの性質が、係数体 k の標数によらないことを示している。一般の半群環については、そのようなことはいえない ([14])。

4 最後に

講演で最後に述べたことに関する正確な statement を付け加えます。もちろん、ht $I(V)$ に関する制限はありません。

まず、次を仮定する。

V は positive, rank $V = r_0$,
$\exists v_1, \cdots, v_{r_0} \in V$
s.t. $V = \langle v_1, \cdots, v_{r_0} \rangle, I(V) = (F(v_{j_1} + \cdots + v_{j_s}))_{\substack{1 \le s \le r_0 \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r_0}}$.

このとき、

定理 4.1 環 $A/I(V)$ は *Cohen-Macaulay* である。

この定理は実際 free resolution を作ることによって示される。r_0 が小さい場合の free resolution は次のようになる。

$$0 \longrightarrow A^2 \longrightarrow A^3 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 2)$$

$$0 \longrightarrow A^6 \longrightarrow A^{12} \longrightarrow A^7 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 3)$$

$$0 \longrightarrow A^{24} \longrightarrow A^{60} \longrightarrow A^{50} \longrightarrow A^{15} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (r_0 = 4)$$

定理の条件をみたす例としては、

(1) $I(V)$ が almost complete intersection,

(2) $A/I(V)$ が planar distributive lattice に付随した環.
(講演ではここがはっきりしなかったところです)

がある。

この節の内容については、現在論文準備中です。

参考文献

[1] H. Bresinsky. Minimal free resolutions of monomial curves in $\mathbf{P}^3_k$. *Linear Algebra and Appl.*, **59**:121–129, (1984).

[2] H. Bresinsky. On the Cohen-Macaulay property for monomial curves in $\mathbf{P}^3$. *Monatsh. Math.*, **98**:21–28, (1984).

[3] H. Bresinsky, F. Curtis, M. Fiorentini, and L. T. Hoa. On the structure of local cohomology modules for monomial curves in $\mathbf{P}_K^3$. *Nagoya Math. J.*, **136**:81–114, (1994).

[4] H. Bresinsky, P. Schenzel, and W. Vogel. On liaison, arithmetical Buchsbaum curves and monomial curves in $\mathbf{P}^3$. *J. Algebra*, **86**:283–301, (1984).

[5] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings.* Cambridge University Press, 1993. Cambridge studies in adv. math. 39.

[6] K. Eto. Affine semigroup rings of codimension two. (to appear).

[7] J. Herzog. Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Math.*, **3**:175–193, (1970).

[8] L. T. Hoa. On monomial k-Buchsbaum curves in $\mathbf{P}^3$. *Manuscripta Math.*, **73**:423–436, (1991).

[9] Y. Kamoi. Defining ideals of Cohen-Macaulay semigroup rings. *Comm. in algebra*, **20**(11):3163–3189, (1992).

[10] Y. Kamoi. Defining ideals of Buchsbaum semigroup rings. *Nagoya Math. J.*, **136**:115–131, (1994).

[11] M. Morales. Equations des variétés monomiales en codimension deux. *J. Algebra*, **175**:1082–1095, (1995).

[12] J. Stückrad and W. Vogel. *Buchsbaum Rings and Applications.* Springer-Verlag, 1986.

[13] N. Terai. Distributive lattices and their associated rings. In 第 17 回可換環論シンポジウム報告集, pages 89–97, 1995.

[14] N. V. Trung and L. T. Hoa. Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298**:145–167, (1986).